MATEMÁTICA DISCRETA I

SEGUNDO PARCIAL (Recuperación) (Soluciones)

Observaciones:

- Tiempo: 1h. 30 m.
- Sólo se valorarán las respuestas que estén justificadas correctamente.
- No está permitido el uso de dispositivos electrónicos.

****

Ejercicio 1

a) **(10 puntos)** Resuelve la ecuación $2x = 4^{1919}$ en $\mathbb{Z}_{2431}$ con $0 \leq x \leq 2431$.

b) **(10 puntos)** Razona si el siguiente sistema de congruencias tiene solución, y en caso afirmativo, resuélvelo

$$\begin{cases} 63x \equiv 45\ (mod\ 90) \\ 30x \equiv 25\ (mod\ 125) \end{cases}$$

Solución

a) Se tiene que $2431 = 11.13.17$ entonces $2x = 4^{1919} \Leftrightarrow x = 2^{-1}.4^{1919}$ en $\mathbb{Z}_{2431}$ con $0 \leq x \leq 2431$, ya que mcd(2, 2431) = 1.

Puesto que $\Phi(2431) = \Phi(11).\Phi(13).\Phi(17) = 10.12.16 = 1920$, como mcd(4, 2431) = 1, entonces

$$[x]_{2431} = [2]_{2431}^{-1}[4]_{2431}^{1919} = [2]_{2431}^{-1}[4]_{2431}^{1920-1} = [8]_{2431}^{-1}$$

Si $[x]_{2431} = [8]_{2431}^{-1}$ entonces $8x \equiv 1 mod(2431) \Longrightarrow 8x - 2431y = 1$

$$\begin{cases} 2431 = 8.303 + 7 \\ 8 = 7.1 + 1 \end{cases} \Longrightarrow 1 = 8 - 7 = 8 - (2431 - 8.303) = -2431 + 304.8 \Longrightarrow x = 304 \text{ en } \mathbb{Z}_{2431}$$

b) $$\begin{cases} 63x \equiv 45\ (mod\ 90) \\ 30x \equiv 25\ (mod\ 125) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 7x \equiv 5\ (mod\ 10) \\ 6x \equiv 5\ (mod\ 25) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \equiv 3.5\ (mod\ 10) = 5\ (mod\ 10) \\ x \equiv -4.5\ (mod\ 25) = 5\ (mod\ 25) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 5\ (mod\ 10) \\ x \equiv 5\ (mod\ 25) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - 10y = 5 \\ x - 25z = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - 10y = 5 \\ 10y = 25z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 5t \\ z = 2t \\ x = 5 + 50t \end{cases}, \forall t \in \mathbb{Z} \Longrightarrow [x]_{50} = [5]_{50}$$

Ejercicio 2

La Asamblea Regional de Cantabria está constituida por 35 diputados. Se quiere elegir una comisión de 8 diputados para ir al Parlamento Europeo a solicitar la denominación de origen de la anchoa cántabra.

a) **(5 puntos)** ¿De cuántas formas puede hacerse la elección?

b) **(5 puntos)** Una vez elegida la comisión se elige de entre los miembros de la comisión un Presidente, un Vicepresidente y un Portavoz, ¿de cuántas formas distintas puede hacerse la elección?

c) **(5 puntos)** Para estudiar las distintas variedades de anchoa que hay en Cantabria, se elige de entre los miembros de la comisión anterior a 4 diputados de manera que el Presidente y el Vicepresidente no estén juntos a la vez, ¿de cuántas maneras distintas se puede hacer la elección?

Solución

a) $C_{35,8} = \binom{35}{8}$

b) 8.7.6 = 336

c) $2C_{6,3} + C_{6,4} = 2\binom{6}{3} + \binom{6}{4} = 55$

MATEMÁTICA DISCRETA I

SEGUNDO PARCIAL (Recuperación) (Soluciones)

Ejercicio 3

(10 puntos) Halla el número de soluciones enteras de la ecuación

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 30 \\ 3 \le x_1 \le 10, 3 \le x_2 \le 10, 3 \le x_3 \le 10 \end{cases}$$

Solución

El número de soluciones enteras de la ecuación

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 30 \\ 3 \le x_1 \le 10, 3 \le x_2 \le 10, 3 \le x_3 \le 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 21 \\ 0 \le x_1 \le 7, 0 \le x_2 \le 7, 0 \le x_3 \le 7 \end{cases}$$

es el número de soluciones enteras de la ecuación $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 21 \\ 0 \le x_1 \quad y \quad 0 \le x_2 \quad y \quad 0 \le x_3 \end{cases}$

menos el número de soluciones enteras de la ecuación $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 21 \\ 8 \le x_1 \quad \text{o} \quad 8 \le x_2 \quad \text{o} \quad 8 \le x_3 \end{cases}$

Es decir, $CR_{n=3,k=21} - 3CR_{n=3,k=13} + 3CR_{n=3,k=5} = \binom{23}{2} - 3\binom{15}{2} + 3\binom{7}{2} = 1$

Ejercicio 4

a) **(10 puntos)** Resuelve la siguiente relación de recurrencia con sus condiciones iniciales

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - 3^n, \qquad \forall n \ge 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

b) **(5 puntos)** Un agricultor aficionado decide fundar la bodega Tío Emilio. El primer año la bodega cosecha 3 toneladas de uva, el segundo año cosecha 8 toneladas de uva y los siguientes años la bodega cosecha el doble de lo cosechado el año anterior.

Sea a_n el número total de toneladas cosechadas en los n primeros años, encuentra una relación de recurrencia para a_n.

Solución

a) La ecuación característica es $C(x) = x - 2 = 0$, con solución $x = 2$.

Solución general de la relación de recurrencia: $a_n = A\, 2^n + P(n)$

Solución particular: $P(n) = K\ 3^n$, que verifica la relación $P(n) = 2\,P(n-1) - 3^n$

Resolviendo resulta $K = -3$, por tanto, la solución general es $a_n = A\, 2^n - 3.3^n$

Sustituyendo las condiciones iniciales, se tiene que $A = 5$

Entonces, la solución general es: $a_n = 5.2^n - 3^{n+1}$

b) Algunas de las posibles soluciones son:

$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} \\ a_1 = 3, a_2 = 11 \end{cases}$ $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2^{n+1} \\ a_1 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 5 \\ a_1 = 3 \end{cases}$